CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	MMA-R1_1P-202, MMA-R1_2P-202, MMA-R1_3P-202, MMA-R1_4P-202, MMA-R1_5P-202, MMA-R1_6P-202, MMA-R1_7P-202, MMA-R1_QP-202
Termin egzaminu:	Termin główny – czerwiec 2020 r.
Data publikacji dokumentu:	3 sierpnia 2020 r.

Warszawa 2020

Zadanie 1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian x – a (R3.4).	**B**

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów (R5.2).	**C**

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź
III. Modelowanie matematyczne	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzenia mi do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1).	**A**

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1). Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$ (R2.1).	**B**

Zadanie 5. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów (R7.5).	9 5 5

Uwaga: Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bez względnej i jej interpretację geometryczną (R1.1). 4. Funkcje. Zdający szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu (R4.4).

Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający naszkicuje wykres funkcji *f* określonej wzorem:

- $f(x)=|x-5|$

albo

- $f(x)=|x-5|+4$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający zapisze układ nierówności

- $0<(a-1)^2-4<5$ **oraz** rozwiąże poprawnie jedną z nierówności tego układu

albo

- $4<(a-1)^2<9$ **oraz** rozwiąże poprawnie jedną z nierówności tego układu

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3p.

Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający zapisze, że podane równanie ma dwa rozwiązania dodatnie, gdy spełniona jest nierówność

$$0<|x-5|<5$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający zapisze układ nierówności $0<(a-1)^2-4<5$ **oraz** rozwiąże poprawnie jedną z dwóch nierówności tego układu i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3p.

Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

Zasady oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający:

- zapisze, że podane równanie ma więcej niż jedno rozwiązanie wtedy, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2-4>0,$$

albo

- zapisze podane równanie w postaci alternatywy równań

$$x-5=(a-1)^2-4 \quad \text{lub} \quad x-5=-(a-1)^2+4$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający:

- zapisze, że podane równanie ma więcej niż jedno rozwiązanie wtedy, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2-4>0$$

i

- zapisze podane równanie w postaci alternatywy równań

$$x-5=(a-1)^2-4 \text{ lub } x-5=-(a-1)^2+4$$

i

- rozwiąże poprawnie przynajmniej jedną z trzech nierówności:

$$(a-1)^2-4>0,\ (a-1)^2+1>0,\ 9-(a-1)^2>0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3p.

Zdający zapisze, że $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

Zasady oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.
Zdający
- zapisze warunek istnienia rozwiązań rzeczywistych równania $|x-5|=(a-1)^2-4$:

$$(a-1)^2-4\ge 0$$

albo
- zdający zapisze układ nierówności:

$$(-10)^2-4\left(25-\left((a-1)^2-4\right)^2\right)>0 \text{ i } \frac{-(-10)}{1}>0 \text{ i } 25-\left((a-1)^2-4\right)^2>0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający zapisze układ nierówności

$$(a-1)^2-4\ge 0 \text{ i } (-10)^2-4\left(25-\left((a-1)^2-4\right)^2\right)>0 \text{ i } \frac{-(-10)}{1}>0 \text{ i } 25-\left((a-1)^2-4\right)^2>0$$

i poprawnie rozwiąże drugą lub czwartą z nich i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 3p.
Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

Zasady oceniania V sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający zastosuje definicję wartości bezwzględnej i zapisze równanie w każdym z dwóch przypadków:

gdy $x-5\ge 0$, to $x-5=(a-1)^2-4$,

gdy $x-5<0$, to $5-x=(a-1)^2-4$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający zapisze warunki na to, żeby rozwiązaniem równania była liczba dodatnia w każdym z dwóch rozpatrywanych przypadków i wyznaczy wszystkie wartości parametru *a*, dla których rozwiązaniem równania jest liczba dodatnia w jednym z tych przypadków:

- gdy $x-5\ge 0$, to $(a-1)^2+1>0$ i $(a-1)^2+1\ge 5$, skąd $a\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 3,+\infty)$

albo
- gdy $x-5<0$, to $9-(a-1)^2>0$ i $9-(a-1)^2<5$, skąd $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3p.
Zdający wyznaczy wszystkie wartości parametru *a*, dla których równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ ma dwa rozwiązania dodatnie: $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

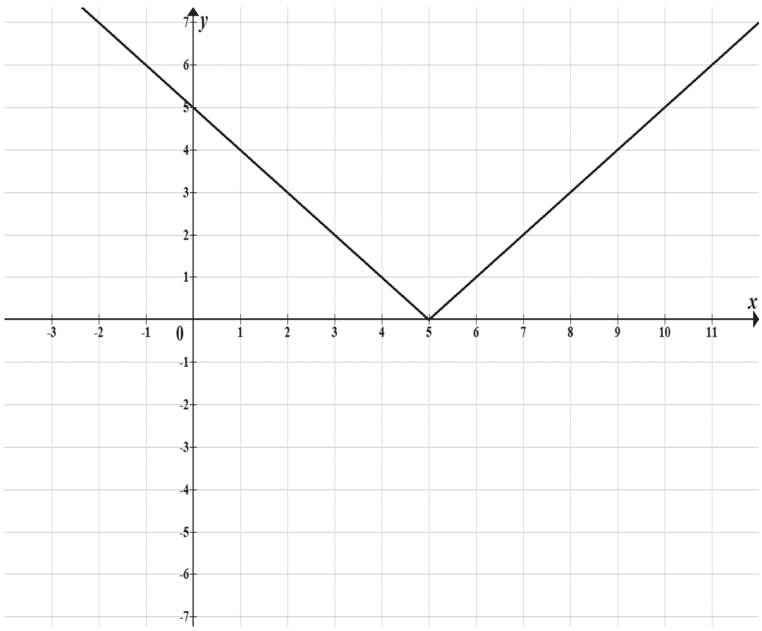
Uwaga
Jeżeli zdający rozpatrzy oba przypadki, ale w pierwszym przypadku nie skomentuje, że nierówność $(a-1)^2+1>0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej *a*, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Uwagi
1. Jeśli zdający rozwiązuje zadanie sposobem II lub III zapisze nierówność $(a-1)^2-4\geq 0$ i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, otrzymując w odpowiedzi zbiór $(-2,-1\rangle\cup\langle 3,4)$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozwiązuje zadanie I sposobem i naszkicowany wykres zawiera usterki, ale dalsze rozumowanie jest prawidłowe, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty.**
3. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji $f(x)=|x-5|+4$, błędnie przesunie wykres funkcji $y=|x-5|$ o 4 jednostki w dół i konsekwentnie przeprowadzi rozumowanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji $f(x)=|x-5|+4$, zamieni miejscami współrzędne wektora przesunięcia, otrzyma wykres funkcji, dla której istnieją dwa rozwiązania dodatnie równania $f(x)=(a-1)^2$ i konsekwentnie przeprowadzi rozumowanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
5. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji $f(x)=|x-5|$, błędnie przesunie wykres funkcji $y=|x|$, i otrzyma wykres funkcji *g* takiej, że nie istnieją dwa dodatnie rozwiązania równania $g(x)=(a-1)^2-4$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Rozważmy funkcję *f* określoną wzorem $f(x)=|x-5|$ i naszkicujmy jej wykres.



Wnioskujemy stąd, że podane równanie ma dwa pierwiastki dodatnie, jeśli spełniona jest nierówność

$0<(a-1)^2-4<5$, czyli nierówność $4<(a-1)^2<9$.

Stąd otrzymujemy, że $2<|a-1|<3$, zatem

$$(a-1)\in(-3,-2)\cup(2,3).$$

Ostatecznie $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

<u>II sposób</u> („*podstawianie*”)

Równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ ma dwa dodatnie rozwiązania rzeczywiste, gdy prawdziwa jest nierówność

$$0<|x-5|<5.$$

Ponieważ $|x-5|=(a-1)^2-4$, więc prawdziwa jest nierówność

$$0<(a-1)^2-4<5$$

Nierówność ta jest równoważna koniunkcji nierówności

$$(a-3)(a+1)>0 \quad \text{i} \quad (a+2)(a-4)<0,$$

skąd otrzymujemy

$$a\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty) \quad \text{i} \quad a\in(-2,4).$$

Zatem dla $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$ równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ ma dwa rozwiązania dodatnie.

<u>III sposób</u>

Równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ ma dwa rozwiązania, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2-4>0.$$

Nierówność ta jest równoważna nierówności $(a-3)(a+1)>0$, skąd otrzymujemy

$$a<-1 \text{ lub } a>3. \qquad \textbf{(1)}$$

Równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ jest równoważne alternatywie równań:

$$x-5=(a-1)^2-4 \quad \text{lub} \quad x-5=-(a-1)^2+4$$

$$x=(a-1)^2+1 \quad \text{lub} \quad x=-(a-1)^2+9$$

Rozwiązanie pierwszego z równań jest liczbą dodatnią, dla każdej liczby rzeczywistej a.
Zatem, aby równanie miało dwa dodatnie rozwiązania musi być spełniony warunek:

$$-(a-1)^2+9>0.$$

Stąd otrzymujemy $(3+a-1)(3-a+1)>0$, czyli $(a+2)(4-a)>0$, a zatem

$$-2<a<4. \qquad \textbf{(2)}$$

Uwzględniając **(1)** i **(2)** otrzymujemy $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

<u>IV sposób</u>

Ponieważ lewa strona równania $|x-5|=(a-1)^2-4$ jest nieujemna, więc równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(a-1)^2-4\ge 0,$$

$$(a-1-2)(a-1+2)\ge 0,$$

$$(a-3)(a+1)\ge 0,$$

$$a\le -1 \quad \text{lub} \quad a\ge 3.$$

Podnosząc obie strony równania $|x-5|=(a-1)^2-4$ do kwadratu, otrzymujemy równanie równoważne

$$|x-5|^2=\left((a-1)^2-4\right)^2,$$

$$(x-5)^2=\left((a-1)^2-4\right)^2,$$

$$x^2-10x+25-\left((a-1)^2-4\right)^2=0.$$

Równanie to ma dwa dodatnie rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2, gdy spełnione są jednocześnie trzy warunki

$$\Delta>0 \quad \text{i} \quad x_1+x_2>0 \quad \text{i} \quad x_1x_2>0.$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy

$$(-10)^2-4\left(25-\left((a-1)^2-4\right)^2\right)>0 \quad \text{i} \quad \frac{-(-10)}{1}>0 \quad \text{i} \quad 25-\left((a-1)^2-4\right)^2>0,$$

Druga z tych nierówności jest prawdziwa dla każdej wartości rzeczywistej *a*.

Rozwiązujemy pierwszą z tych nierówności

$$100-4\left(25-\left((a-1)^2-4\right)^2\right)>0,$$

$$25-\left(25-\left((a-1)^2-4\right)^2\right)>0,$$

$$\left((a-1)^2-4\right)^2>0,$$

$$(a-1)^2-4\neq 0,$$

$$(a-1-2)(a-1+2)\neq 0,$$

$$(a-3)(a+1)\neq 0,$$

$$a\neq 3 \quad \text{i} \quad a\neq -1.$$

Rozwiązujemy trzecią z nierówności

$$25-\left((a-1)^2-4\right)^2>0,$$

$$\left(5-\left((a-1)^2-4\right)\right)\left(5+\left((a-1)^2-4\right)\right)>0,$$

$$\left(9-(a-1)^2\right)\left((a-1)^2+1\right)>0,$$

Ponieważ $(a-1)^2+1>0$ dla każdej wartości *a*, więc

$$9-(a-1)^2>0,$$

$$\left(3-(a-1)\right)\left(3+(a-1)\right)>0,$$

$$(4-a)(2+a)>0,$$

$$-2<a<4.$$

W rezultacie otrzymujemy

$$(a\leq -1 \text{ lub } a\geq 3) \text{ i } a\neq 3 \text{ i } a\neq -1 \text{ i } -2<a<4.$$

Stąd $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

<u>V sposób</u>

Rozważmy dwa przypadki.

1. Gdy $x-5\geq 0$, czyli $x\geq 5$, to wtedy $|x-5|=x-5$, a równanie ma postać $x-5=(a-1)^2-4$. Stąd $x=(a-1)^2+1$. Rozwiązanie to jest dodatnie dla każdej wartości rzeczywistej *a*. Ponieważ $x\geq 5$, więc $(a-1)^2+1\geq 5$, czyli $(a-1)^2\geq 4$, skąd $|a-1|\geq 2$, a więc $a\leq -1$ lub $a\geq 3$. W tym przypadku otrzymujemy
$$a\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 3,+\infty).$$
2. Gdy $x-5<0$, czyli $x<5$, to wtedy $|x-5|=5-x$, a równanie ma postać $5-x=(a-1)^2-4$. Stąd $x=9-(a-1)^2$. Rozwiązanie to jest dodatnie, gdy $9-(a-1)^2>0$, czyli $(a-1)^2<9$, skąd $|a-1|<3$, a więc $-2<a<4$. Rozwiązanie to jest

mniejsze od 5, gdy $9-(a-1)^2<5$, czyli $(a-1)^2>4$, skąd $|a-1|>2$, a więc $a<-1$ lub $a>3$. Zatem w tym przypadku otrzymujemy $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

W rezultacie rozpatrzonych przypadków otrzymujemy

$$a\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 3,+\infty) \quad \text{i} \quad a\in(-2,-1)\cup(3,4),$$

a więc $a\in(-2,-1)\cup(3,4)$.

Zadanie 7. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów (7.3).

Zasady oceniania I i II sposobu
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.
Zdający:

- skorzysta z podobieństwa trójkątów i zapisze, np.: $|AD|=3|KP|$ lub $|CP|=x$ i $|DP|=2x$

albo

- skorzysta z twierdzenia o odcinkach stycznych i zapisze, np.: $|KM|=|KP|$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający:

- skorzysta z podobieństwa trójkątów *CPK* i *CMD* i zapisze poprawne równanie pozwalające obliczyć długość odcinka *PK*: $\frac{|PK|}{2}=\frac{2x}{3x}$

albo

- skorzysta z podobieństwa trójkątów *ADM* i *ACD* i zapisze poprawne równanie z jedną niewiadomą, np. $\frac{4-t}{3t}=\frac{3t}{6}$, gdzie $t=|KM|=|KP|$

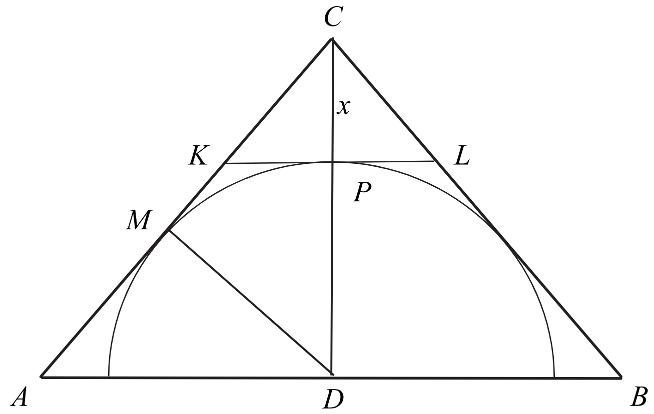
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 3p.

Zdający rozwiąże powyższe równanie i uzasadni, że $|AM|:|MC|=4:5$.

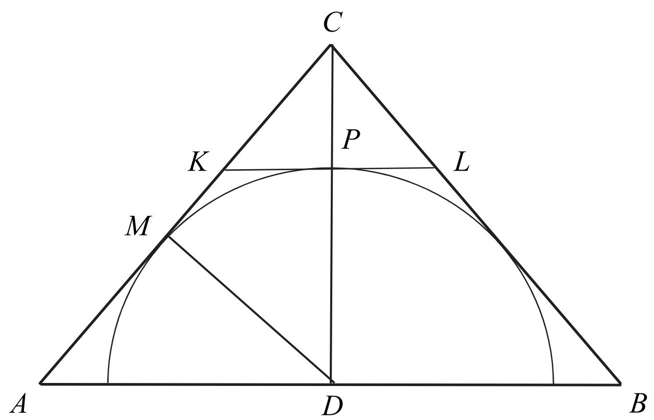
Przykładowe rozwiązanie

I sposób
Najpierw uzupełnimy rysunek.



Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnosimy, że odcinek KL jest równoległy do odcinka AB.
Oznaczmy środek odcinka *KL* przez *P* i niech $|CP| = x$.
Trójkąty *CKP* i *CAD* są podobne (cecha *KKK*) w skali 1:3. Wtedy $|PD| = 2x$ i $|MD| = 2x$.
Trójkąty *CPK* i *CMD* są podobne (cecha *KKK*). Stąd $\frac{|PK|}{|CK|} = \frac{|MD|}{|CD|}$, czyli $\frac{|PK|}{2} = \frac{2x}{3x}$.
Stąd $|PK| = \frac{4}{3}$, więc $|AM| = \frac{8}{3}$ oraz $|MC| = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$.
Zatem $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{4}{5}$.
To kończy dowód.

II sposób
Najpierw uzupełnimy rysunek.



Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnosimy, że odcinek KL jest równoległy do odcinka AB.
Niech punkt *P* będzie środkiem odcinka *KL*.
Zauważamy, że $|KM| = |KP|$, z twierdzenia o równości odcinków stycznych, łączących punkt leżący poza okręgiem z punktami styczności.

Niech $|KM| = |KP| = t$. Wtedy $|AD| = 3t$ i $|AM| = 4 - t$. Trójkąt ADM jest podobny do trójkąta ACD, na mocy cechy (kąt, kąt, kąt); są to trójkąty prostokątne, a kąt MAD jest wspólny dla obu trójkątów.

Możemy zatem zapisać równość: $\frac{|AM|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AC|}$, czyli $\frac{4-t}{3t} = \frac{3t}{6}$, skąd otrzymujemy równanie $9t^2 + 6t - 24 = 0$.

Równanie to ma dwa rozwiązania: $t = -2$, $t = \frac{4}{3}$. Odrzucamy ujemne rozwiązanie tego równania.

Zatem $t = \frac{4}{3}$. Ostatecznie $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4 - \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{4}{5}$.

To kończy dowód.

Zadanie 8. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).

Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.
Zdający zapisze równanie $(a+1)^2 = (2b+1)^2$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający zapisze wniosek $a = 2b$ (bez uzasadnienia lub z niepełnym uzasadnieniem)
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne... 3p.

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..1p.

Zdający zapisze równanie $(a-2b)(a+2b) = -2(a-2b)$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający zapisze wniosek $a = 2b$ (bez uzasadnienia lub z niepełnym uzasadnieniem) i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 3p.

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

Zasady oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania...1p.

Zdający obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b$ np. zmiennej *a*, $\Delta = \left(4b+2\right)^2$ i zapisze, że jest on nieujemny dla każdej wartości *b* albo, że jest on dodatni dla każdej wartości $b > 0$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2p.

Zdający obliczy pierwiastki trójmianu $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b$: $a = -2 - 2b$ lub $a = 2b$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 3p.

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

Uwaga
Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość równania jedynie dla wybranych wartości *a* i *b*, to otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>
Zapisujemy równanie równoważne równaniu z założenia: $a^2 + 2a + 1 = 4b^2 + 4b + 1$.
Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia i zapisujemy to równanie w postaci $(a+1)^2 = (2b+1)^2$. Oba wyrażenia w nawiasach są dodatnie, zatem równość kwadratów jest równoważna równości tych wyrażeń, stąd $a + 1 = 2b + 1$ i dalej, $a = 2b$.

To kończy dowód.

<u>II sposób</u>
Przekształcamy założenie równoważnie:

$$a^2 - 4b^2 = 4b - 2a.$$
$$(a-2b)(a+2b) = -2(a-2b)$$
$$(a-2b)(a+2b+2) = 0.$$

Liczby *a* i *b* są dodatnie, zatem $a + 2b + 2 \neq 0$. Stąd $a - 2b = 0$, czyli $a = 2b$.

To kończy dowód.

III sposób

Wyrażenie $a^2+2a-4b^2-4b$ traktujemy jako trójmian kwadratowy jednej zmiennej np. *a*.

Wyróżnik trójmianu kwadratowego $a^2+2a-4b^2-4b$ jest równy: $\Delta=(4b+2)^2$.

Ten wyróżnik jest nieujemny dla każdej rzeczywistej wartości *b*.

Obliczamy pierwiastki tego trójmianu

$$a=-2-2b \text{ lub } a=2b.$$

Ponieważ $b>0$, więc liczba $-2-2b<0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $a>0$.

Zatem $a=2b$.

To kończy dowód.

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.6).

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1p.

Zdający doprowadzi równanie do postaci równoważnej, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna tego samego kąta, np.: $3-6\sin^2 x+10-10\sin^2 x=24\sin x-3$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2p.

Zdający rozwiąże równanie kwadratowe $2t^2+3t-2=0$: $t=-2$ oraz $t=\frac{1}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- zapisze, że równanie $\sin x=-2$ nie ma rozwiązań i poda co najmniej jedną serię rozwiązań równania $\sin x=\frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{lub} \quad x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,$$ gdzie *k* jest liczbą całkowitą

albo

- zapisze, że równanie $\sin x=-2$ nie ma rozwiązań i poda jedno rozwiązanie równania $\sin x=\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

Rozwiązanie pełne.. 4 p.

Zdający wyznaczy oba rozwiązania równania: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ oraz $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Uwagi

1. Akceptujemy przybliżone rozwiązania elementarnych równań trygonometrycznych.
2. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie obydwa rozwiązania równania $\sin x = \frac{1}{2}$ należące do przedziału $\left(0, 2\pi\right)$ i nie zapisze komentarza dotyczącego równania $\sin x = -2$, to otrzymuje **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający przed uzyskaniem trygonometrycznych równań elementarnych popełni błędy rachunkowe i otrzyma równania elementarne, z których co najmniej jedno ma dwie serie rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający przed uzyskaniem elementarnych równań trygonometrycznych popełni błąd polegający na niepoprawnym zastosowaniu wzoru na cosinus kąta podwojonego lub błąd polegający na podstawieniu w miejsce $\sin x$ wyrażenia $\sqrt{1-\cos^2 x}$, ale otrzyma co najmniej jedno równanie typu $\sin x = a$, gdzie $a \in \left(-1,0\right) \cup \left(0,1\right)$, i konsekwentnie to równanie rozwiąże, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**. Jeżeli jednak zdający otrzyma co najmniej jedno równanie typu $\sin x = a$, gdzie $a \in \left\{-1, 0, 1\right\}$, i to równanie konsekwentnie rozwiąże, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający zapisze równanie $\sin x = \frac{2}{3}\cos^2 x$, równoważne równaniu $3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3$, a następnie rozwiąże równanie $\frac{4}{9}\cos^4 x + \cos^2 x - 1 = 0$, otrzymując 4 rozwiązania tego równania należące do przedziału $\left\langle 0, 2\pi \right\rangle$: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$ i nie odrzuci „obcych” rozwiązań: $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy dane równanie w sposób równoważny:

$$3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3,$$
$$3\left(1-2\sin^2 x\right) + 10\left(1-\sin^2 x\right) = 24\sin x - 3,$$
$$3 - 6\sin^2 x + 10 - 10\sin^2 x = 24\sin x - 3,$$
$$16 - 16\sin^2 x = 24\sin x,$$
$$16\sin^2 x + 24\sin x - 16 = 0$$
$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

Niech $t = \sin x$. Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0,$$
$$\Delta = 3^2 + 4\cdot 2\cdot 2 = 9 + 16 = 25,$$
$$\sqrt{\Delta} = 5,$$

$$t_1 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2,$$
$$t_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Równanie $\sin x = -2$ jest sprzeczne, a równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ dwa rozwiązania: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ oraz $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 10. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n*-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3). Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n*-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).

Zasady oceniania I, II i III sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1p.

Zdający
- wykorzysta wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego lub własność ciągu geometrycznego i zapisze np.:

  $a_2 = a_1 q$ i $a_3 = a_1 q^2$

  lub

  $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4}$

  lub

  $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$

albo
- wykorzysta wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego lub własność ciągu arytmetycznego i zapisze np.:
  - ($a_2 = a_3 + r$ i $a_1 = a_3 + 3r$) lub ($b_2 = a_3 + r$ i $b_4 = a_3 + 3r$) lub ($b_2 = b_1 + r$ i $b_4 = b_1 + 3r$)

  lub
  - $a_1 - a_2 = 2(a_2 - a_3)$ lub $b_4 - b_2 = 2(b_2 - b_1)$

  lub
  - $b_3 = \frac{b_4 + b_2}{2}$ i $b_2 = \frac{b_1 + b_3}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2p.

Zdający
- zapisze układ równań, z którego można otrzymać równanie z jedną niewiadomą, np.:
  - $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4}$ i $a_1 = a_1 q^2 + 3(a_1 q - a_1 q^2)$

lub

- $a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4}$ i $a_1q = \dfrac{\frac{a_1+a_1q}{2} + a_1q^2}{2}$

albo

- zapisze równanie pozwalające wyznaczyć związek między a_3 i *r*, np.:

  $\left(a_3 + r\right)^2 = \left(a_3 + 3r\right) \cdot a_3$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3p.

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $2q^2 - 3q + 1 = 0$

albo

- zapisze $r = a_3$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4p.

Zdający

- rozwiąże równanie z jedną niewiadomą, np. $2q^2 - 3q + 1 = 0$: $q = 1$ lub $q = \frac{1}{2}$

albo

- obliczy trzeci wyraz ciągu geometrycznego $\left(a_n\right)$: $a_3 = \frac{3}{4}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 5 p.

Zdający obliczy pierwszy wyraz ciągu geometrycznego $a_1 = 3$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający rozwiąże równanie z jedną niewiadomą, np. $2q^2 - 3q + 1 = 0$: $q = 1$ lub $q = \frac{1}{2}$ oraz obliczy dwie wartości a_1: $a_1 = 3$, $a_1 = \frac{7}{4}$ i nie odrzuci $a_1 = \frac{7}{4}$, to otrzymuje **4 punkty**.
2. Jeśli zdający stosuje poprawną strategię rozwiązania zadania, a jedynymi błędami w rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje maksymalnie **4 punkty**.
3. Jeśli zdający błędnie stosuje wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego (np. zapisuje $a_3 = a_1q^3$) lub ciągu arytmetycznego i korzysta z tego w rozwiązaniu, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeśli zdający odgadnie iloraz ciągu geometrycznego, a następnie obliczy na tej podstawie pierwszy wyraz tego ciągu, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
5. Jeśli zdający zamienia (myli) własności ciągu geometrycznego z własnościami ciągu arytmetycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
6. Jeśli zdający zapisuje tylko odpowiedź $a_1 = 3$, to otrzymuje **0 punktów**.
7. Akceptujemy sytuacje, w których zdający dzieli obie strony zbudowanych przez siebie równań przez a_1 albo przez r, albo też przez $q - 1$ bez zapisania jakiegokolwiek komentarza.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Sumując wyrazy ciągu geometrycznego otrzymujemy równość

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4}. \qquad \textbf{(1)}$$

Niech (b_n) będzie rosnącym ciągiem arytmetycznym.

Zatem $b_1 = a_1 q^2$, $b_2 = a_1 q$, $b_4 = a_1$, więc różnica tego ciągu $r = a_1 q - a_1 q^2$ oraz $b_4 = b_1 + 3r$,

czyli $a_1 = a_1 q^2 + 3\left(a_1 q - a_1 q^2\right)$.

Stąd wynika, że $a_1 = 3a_1 q - 2a_1 q^2$ i $a_1\left(2q^2 - 3q + 1\right) = 0$.

Ponieważ z równości **(1)** wynika, że $a_1 \neq 0$, więc $2q^2 - 3q + 1 = 0$. Zatem $q = 1$ lub $q = \frac{1}{2}$.

Dla $q = 1$ ciąg (a_n) jest stały. Stąd ciąg (b_n) też jest stały. Zatem tylko dla $q = \frac{1}{2}$ ciąg (b_n)

może być ciągiem rosnącym. Otrzymujemy wtedy $r = \frac{1}{4} a_1$. Z równości **(1)** otrzymujemy

$a_1 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{4} a_1 = \frac{21}{4}$, a stąd wynika, że $a_1 = 3$.

II sposób

W ciągu arytmetycznym $b_1 = a_3$, $b_2 = a_3 + r$, $b_4 = a_3 + 3r$, gdzie $r > 0$.

Ponieważ ciąg $(a_3 + 3r,\ a_3 + r,\ a_3)$ jest ciągiem geometrycznym, więc zachodzi równość

$$(a_3 + r)^2 = (a_3 + 3r) \cdot a_3,$$

skąd wynika, że $a_3^2 + 2a_3 r + r^2 = a_3^2 + 3a_3 r$,

a zatem $r^2 = a_3 r$.

Ponieważ z założenia $r > 0$, więc $r = a_3$. Podana suma trzech wyrazów jest zatem równa

$$4a_3 + 2a_3 + a_3 = \frac{21}{4}.$$

Otrzymujemy zatem $a_3 = \frac{3}{4}$. Wtedy $a_1 = b_4 = 4a_3 = 3$.

III sposób

Z danych w treści zadania wynikają równości:

$$b_1 = a_1 q^2,\ b_2 = a_1 q,\ b_4 = a_1.$$

Ponieważ (b_n) jest ciągiem arytmetycznym, więc możemy zapisać równości

$$b_3 = \frac{b_4 + b_2}{2} = \frac{a_1 + a_1 q}{2}$$

oraz

$$b_2 = \frac{b_3 + b_1}{2} = \frac{\frac{a_1 + a_1 q}{2} + a_1 q^2}{2} = a_1 q$$

Rozwiążemy równanie

$$\frac{\frac{a_1 + a_1 q}{2} + a_1 q^2}{2} = a_1 q$$

Ponieważ $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4}$, więc możemy założyć, że $a_1 \neq 0$. Powyższe równanie jest zatem równoważne równaniu

$$\frac{\frac{1+q}{2} + q^2}{2} = q \text{, czyli równaniu } 1 + q + 2q^2 = 4q.$$

Równanie kwadratowe $2q^2 - 3q + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania: $q = 1$ oraz $q = \frac{1}{2}$.

Jeśli $q = 1$, to obydwa ciągi są ciągami stałymi. Zatem tylko dla $q = \frac{1}{2}$ ciąg (b_n) może być ciągiem rosnącym.

Z równości $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4}$ otrzymujemy równanie $\frac{7}{4} a_1 = \frac{21}{4}$, czyli $a_1 = 3$.

Zadanie 11. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.1).

Zasady oceniania I i II sposobu

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części.
Pierwsza z nich polega na:

- rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \in R \setminus \{8\}$

albo

- sprawdzeniu, że dla każdej obliczonej wartości parametru *m* równanie $x^2 - (3m+2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste.

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

Druga część polega na wyznaczeniu tych wartości parametru *m*, dla których jest spełniony warunek $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.
Podział punktów za drugą część rozwiązania:

1 punkt zdający otrzymuje za:

- obliczenie dwóch pierwiastków trójmianu $x^2 - (3m+2)x + 2m^2 + 7m - 15$:

$$x_1 = m + 5 \text{ oraz } x_2 = 2m - 3.$$

albo

- przekształcenie wyrażenia $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2$ do postaci: $2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2$ lub równoważnej, ale zawierającej jedynie zmienne $x_1 + x_2$ oraz $x_1 \cdot x_2$.

2 punkty zdający otrzymuje za:

- zapisanie równania $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$ w postaci równania z jedną niewiadomą *m*, np.:

  $2(m+5)^2+5(m+5)(2m-3)+2(2m-3)^2=2$

albo

- zapisanie równania $2(x_1+x_2)^2+x_1x_2=2$ w postaci równania z jedną niewiadomą *m*,

  np.: $2(3m+2)^2+2m^2+7m-15=2$.

3 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie równania $20m^2+31m-9=0$:

$$m_1=-\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2=\frac{1}{4}.$$

Uwagi

1. Jeżeli zdający zamienia wzory Viète'a przy przekształcaniu lewej strony równania $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty.**
2. Jeżeli zdający rozpatruje warunek $\Delta \geq 0$ i nie sprawdzi, że dla każdej z otrzymanych wartości parametru *m* równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający przekształci warunek $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$, otrzyma $2(x_1+x_2)^2+3x_1x_2=2$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający wykorzystuje niepoprawny wzór „kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń", przekształci warunek $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$ do postaci $2(x_1+x_2)^2+5x_1x_2=2$, i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający rozpatrując równość $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$ zmieni liczbę po prawej stronie i zapisze równanie, wynikające ze wzorów Viete'a, w postaci $2(3m+2)+2m^2+7m-15=0$, pomijając wykładnik 2 potęgi o podstawie $(3m+2)$, to za drugą część rozwiązania zadania może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

1. Równanie ma dwa różne rozwiązania, gdy wyróżnik trójmianu jest dodatni: $\Delta>0$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu:

$\Delta=\left(-(3m+2)\right)^2-4\left(2m^2+7m-15\right)=m^2-16m+64=(m-8)^2$.

$$(m-8)^2>0, \text{ gdy } m\neq 8.$$

Stąd wynika, że trójmian ma następujące pierwiastki: $x_1=m+5$ oraz $x_2=2m-3$.
Mamy zatem rozwiązać równanie

$$2(m+5)^2+5(m+5)(2m-3)+2(2m-3)^2=2.$$

To równanie doprowadzamy do postaci równoważnej:

$$20m^2+31m-9=0.$$

Ma ono dwa rozwiązania: $m_1=-\frac{9}{5}$ oraz $m_2=\frac{1}{4}$

Każde z otrzymanych rozwiązań jest różne od 8.

Warunki zadania spełniają dwie wartości parametru *m*: $m_1=-\frac{9}{5}$ oraz $m_2=\frac{1}{4}$.

II sposób

Przekształcamy równość $2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2$ w sposób równoważny:

$$2\left(x_1^2+x_2^2\right)+5x_1x_2=2,$$

$$2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)+5x_1x_2=2,$$

$$2\left(x_1+x_2\right)^2+x_1x_2=2.$$

Ze wzorów Viète'a wynika, że

$$x_1+x_2=3m+2 \text{ oraz } x_1x_2=2m^2+7m-15,$$

o ile pierwiastki x_1 i x_2 trójmianu istnieją.

Mamy zatem rozwiązać równanie

$$2\left(3m+2\right)^2+2m^2+7m-15=2.$$

To równanie doprowadzamy do postaci równoważnej

$$20m^2+31m-9=0.$$

Ma ono dwa rozwiązania:

$$m_1=-\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2=\frac{1}{4}.$$

Pozostaje sprawdzić, czy dla tych wartości *m* dany trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki. Możemy, tak jak w sposobie pierwszym, obliczyć wyróżnik i przekonać się, że jest on nieujemny. Możemy także podstawić znalezione wartości parametru *m* do danego trójmianu i przekonać się, że otrzymane trójmiany mają dwa różne pierwiastki.

Po podstawieniu $m=-\frac{9}{5}$ otrzymamy trójmian:

$$x^2+\frac{17}{5}x-\frac{528}{25}.$$

Po podstawieniu $m=\frac{1}{4}$ otrzymamy trójmian:

$$x^2+\frac{11}{4}x-\frac{105}{8}.$$

Oba trójmiany mają dwa różne pierwiastki. Można się o tym przekonać, obliczając wyróżniki lub zauważając, że oba trójmiany mają dodatni współczynnik przy x^2 i ujemny wyraz wolny.

Warunki zadania spełniają dwie wartości parametru *m*:

$$m_1=-\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2=\frac{1}{4}.$$

Zadanie 12. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.) (R7.3). 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności (R8.5).

Zasady oceniania I, II, III, IV i V sposobu rozwiązania

Rozwiązanie składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap polega na wyznaczeniu współrzędnych środka danego okręgu. Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu równania/układu równań prowadzących do wyznaczenia współrzędnych środka jednokładności oraz współrzędnych środka obrazu danego okręgu w tej jednokładności.
Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania
Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy

- zapisze współrzędne środka: $P=(4,3)$

lub

- zapisze równanie okręgu $x^2+y^2-8x-6y+8=0$ w postaci $(x-4)^2+(y-3)^2=17$.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania
Zdający otrzymuje
1 punkt, gdy

- obliczy i zapisze współrzędne punktów K i L: $K=(3,7)$ i $L=(8,2)$

albo

- obliczy odległość punktu *P* od prostej o równaniu $x+y-10=0$: $d=|SP|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

albo

- zapisze równanie prostej przechodzącej przez punkt $P=(4,3)$ prostopadłej do prostej $x+y-10=0$: $x-y-1=0$

albo

- poda tylko promień obrazu okręgu: $R=3\sqrt{17}$,

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje
2 punkty, gdy

- zapisze współrzędne środka jednokładności: $S=\left(\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right)$

albo

- zapisze $P'=(x,x-1)$ i zapisze $|SP'|=3\cdot|SP|=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje
3 punkty, gdy

- zapisze równanie, wynikające z równości $\overrightarrow{SP'}=-3\cdot\overrightarrow{SP}$, prowadzące do wyznaczenia współrzędnych środka $P'=(a,b)$ okręgu, będącego obrazem punktu $P=(4,3)$ w jednokładności:
$$\left[a-\frac{11}{2},\, b-\frac{9}{2}\right]=-3\cdot\left[4-\frac{11}{2},3-\frac{9}{2}\right]$$

albo

- wykona poprawne podstawienie do odpowiedniego wzoru w zestawie *Wybranych wzorów matematycznych* i zapisze:
$$a=-3\cdot4+(1-(-3))\cdot\frac{11}{2}\quad\text{oraz}\quad b=-3\cdot3+(1-(-3))\cdot\frac{9}{2}$$

albo

- zapisze równanie, wynikające z równości $\overrightarrow{PP'}=-4\cdot\overrightarrow{SP}$, prowadzące do wyznaczenia współrzędnych środka $P'=(a,b)$ okręgu, będącego obrazem punktu $P=(4,3)$ w tej jednokładności:
$$[a-4,\, b-3]=-4\cdot\left[4-\frac{11}{2},3-\frac{9}{2}\right]$$

albo

- zapisze równanie $\sqrt{(a-4)^2+(a-1-3)^2}=6\sqrt{2}$

albo

- zapisze równanie $\frac{|a+a-1-10|}{\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje
4 punkty, gdy zapisze równanie szukanego okręgu
$$(x-10)^2+(y-9)^2=153\,.$$

Uwagi:

1. Jeśli zdający realizuje poprawną strategię rozwiązania zadania, a jedynymi błędami w rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to za takie rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.
2. Jeśli zdający zakłada błędnie, że środkiem jednokładności jest środek danego okręgu, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za drugą część rozwiązania.
3. Jeśli zdający podczas obliczania współrzędnych punktów *K*, *L* lub *S* popełnia błąd polegający na zamianie współrzędnych i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.
4. Jeśli zdający stosuje błędne równanie $\overrightarrow{SP}=-3\cdot\overrightarrow{SP'}$ i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za drugą część rozwiązania.

5. Jeśli zdający zakłada błędnie, że trójkąt KLP jest trójkątem prostokątnym i w rozwiązaniu stosuje tę własność, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za drugą część rozwiązania.
6. Jeżeli zdający narysuje w układzie współrzędnych dany okrąg i daną prostą, a następnie wyznaczy graficznie obraz środka P' danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k=-3$ oraz zapisze równanie tego otrzymanego okręgu, to może otrzymać 4 **punkty** za drugą część rozwiązania.

Przykładowe rozwiązanie
I sposób
Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2+(y-3)^2=17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P=(4,3)$, a promień okręgu jest równy $r=\sqrt{17}$.

Obliczamy współrzędne punktów K i L rozwiązując układ równań: $\begin{cases} x^2+y^2-8x-6y+8=0 \\ y=10-x \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2+(10-x)^2-8x-6(10-x)+8=0 \\ y=10-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-11x+24=0 \\ y=10-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}.$$

Zatem $K=(3,7)$ i $L=(8,2)$. Środek cięciwy KL, który jest środkiem jednokładności to punkt $S=\left(\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right)$.

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k=-3$ jest okrąg o promieniu $R=3\sqrt{17}$ oraz środku $P'=(a,b)$ takim, że $\overrightarrow{SP'}=-3\cdot\overrightarrow{SP}$. Otrzymujemy równość:

$$\left[a-\frac{11}{2},\, b-\frac{9}{2}\right]=-3\cdot\left[4-\frac{11}{2},3-\frac{9}{2}\right]$$

Zatem

$$\left[a-\frac{11}{2},\, b-\frac{9}{2}\right]=\left[\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right],$$

a stąd $a=10$ i $b=9$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2+(y-9)^2=153$.

Uwaga.

Zdający może z równania prostej wyznaczyć $x=10-y$ i wtedy otrzyma $\begin{cases} 2y^2-18y+28=0 \\ x=10-y \end{cases}$.

II sposób
Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2+(y-3)^2=17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P=(4,3)$, a promień okręgu jest równy $r=\sqrt{17}$.

Obliczamy współrzędne punktów *K* i *L* rozwiązując układ równań: $\begin{cases} x^2+y^2-8x-6y+8=0 \\ y=10-x \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2+(10-x)^2-8x-6(10-x)+8=0 \\ y=10-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-11x+24=0 \\ y=10-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}.$$

Zatem $K=(3,7)$ i $L=(8,2)$. Środek cięciwy KL, który jest środkiem jednokładności to punkt $S=\left(\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right)$.

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k=-3$ jest okrąg o promieniu $R=3\sqrt{17}$ oraz środku $P'=(a,b)$ takim, że $\overrightarrow{PP'}=-4\cdot\overrightarrow{SP}$. Otrzymujemy zatem równość:

$$[a-4,\ b-3]=-4\cdot\left[4-\frac{11}{2},3-\frac{9}{2}\right]$$

Zatem

$$[a-4,\ b-3]=[6,6],$$

a stąd $a=10$ i $b=9$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2+(y-9)^2=153$.

III sposób
Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2+(y-3)^2=17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P=(4,3)$, a promień okręgu jest równy $r=\sqrt{17}$.

Wyznaczamy równanie prostej *l* przechodzącej przez punkt $P=(4,3)$ i prostopadłej do danej prostej $x+y-10=0$. Prosta *l* ma zatem równanie $x-y-1=0$. Środek jednokładności *S* jest punktem wspólnym obu tych prostych, więc jego współrzędne obliczamy rozwiązując układ równań: $\begin{cases} x+y-10=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$.

Stąd $S=\left(\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right)$.

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k=-3$ jest okrąg o promieniu $R=3\sqrt{17}$ oraz środku $P'=(a,b)$ takim, że $\overrightarrow{SP'}=-3\cdot\overrightarrow{SP}$. Otrzymujemy zatem równość:

$$\left[a-\frac{11}{2},\, b-\frac{9}{2}\right]=-3\cdot\left[4-\frac{11}{2},3-\frac{9}{2}\right]$$

Zatem

$$\left[a-\frac{11}{2},\, b-\frac{9}{2}\right]=\left[\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right],$$

a stąd $a=10$ i $b=9$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2+(y-9)^2=153$.

IV sposób

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2+(y-3)^2=17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P=(4,3)$, a promień okręgu jest równy $r=\sqrt{17}$.

Obliczamy odległość *d* punktu *P* od danej prostej o równaniu $x+y-10=0$.

$$d=\frac{|1\cdot 4+1\cdot 3-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k=-3$ jest okrąg o promieniu $R=3\sqrt{17}$ oraz środku $P'=(a,b)$.

Zauważamy, że $|PP'|=4\cdot d$, zatem $|PP'|=6\sqrt{2}$. Wyznaczamy równanie prostej *l* przechodzącej przez punkt $P=(4,3)$ i prostopadłej do danej prostej $x+y-10=0$. Prosta *l* ma zatem równanie $x-y-1=0$. Ponieważ punkt $P'=(a,b)$ leży na tej prostej prostopadłej, więc $P'=(a,a-1)$. Stąd otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{(a-4)^2+(a-1-3)^2}=6\sqrt{2}$$

$$(a-4)^2+(a-4)^2=36\cdot 2$$

$$(a-10)(a+2)=0,$$

skąd $a=10$ lub $a=-2$.

Ponieważ skala jednokładności $k=-3$, więc jednokładność jest odwrotna. Zatem $a=-2$ nie spełnia warunków zadania. Stąd $P'=(10,9)$.

Szukany okrąg ma równanie $(x-10)^2+(y-9)^2=153$.

V sposób

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci $(x-4)^2+(y-3)^2=17$.

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt $P=(4,3)$, a promień okręgu jest równy $r=\sqrt{17}$.

Obliczamy odległość *d* punktu *P* od danej prostej o równaniu $x+y-10=0$:

$$d=\frac{|1\cdot 4+1\cdot 3-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k=-3$ jest okrąg o promieniu $R=3\sqrt{17}$ oraz środku $P'=(a,b)$.

Wyznaczamy równanie prostej *l* przechodzącej przez punkt $P=(4,3)$ i prostopadłej do danej prostej $x+y-10=0$. Prosta *l* ma zatem równanie $x-y-1=0$. Ponieważ punkt $P'=(a,b)$ leży na tej prostej prostopadłej, więc $P'=(a,a-1)$.

Skala jednokładności $k=-3$, więc $|SP'|=|-3|\cdot d=3\cdot d$, zatem $|SP'|=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

Obliczamy odległość punktu $P'=(a,a-1)$ od danej prostej o równaniu $x+y-10=0$

$$|SP'|=\frac{|a+a-1-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|2a-11|}{\sqrt{2}}=\frac{|2a-11|\sqrt{2}}{2}.$$

Otrzymujemy równanie

$$\frac{|2a-11|\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$$
$$|2a-11|=9$$

Jednokładność jest odwrotna, zatem $a=10$. Stąd $P'=(10,9)$.

Szukany okrąg ma równanie: $(x-10)^2+(y-9)^2=153$.

Zadanie 13. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1).

Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie składa się z następujących części.
Pierwsza polega na wyróżnieniu trzech przypadków i dodaniu – w końcowej fazie rozwiązania – otrzymanych trzech wyników.
Druga część polega na zapisaniu liczby rozważanych w każdym przypadku liczb i obliczeniu liczby tych liczb.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 p.

Zdający
- poprawnie wskaże trzy przypadki

albo

- pominie jeden z przypadków, ale zapisze liczbę liczb rozważanych w jednym przypadku, np.: $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2$ lub $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{1}\cdot 8^2$ lub $7\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki oraz zapisze liczbę liczb rozważanych w jednym przypadku lub pominie jeden przypadek, zapisze liczbę liczb w dwóch wskazanych przez siebie przypadkach.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki i zapisze liczbę liczb rozważanych w dwóch przypadkach.

Rozwiązanie pełne.. 4 p.

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki i poprawnie obliczy liczbę rozważanych liczb: 12960.

Uwagi

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb siedmiocyfrowych bez użycia symbolu Newtona oraz symbolu silni.
2. Jeśli zdający w każdym z trzech rozpatrywanych przypadków poprawnie zapisze jedynie liczbę sposobów rozmieszczenia:
   - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry 2

   lub
   - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2

   lub
   - cyfry 2 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2,

   to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty.**

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie składa się z dwóch części.
Pierwsza polega na obliczeniu liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ oraz liczby tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0.
Druga część polega na obliczeniu liczby szukanych liczb.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1p.

Zdający zapisze, że

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb

albo

- wszystkich „liczb" siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2$

albo

- wszystkich „liczb" siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie jedna cyfra ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze, że

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb" siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb

  oraz

  wszystkich „liczb" siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2$

albo

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb" siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb

  oraz

  wszystkich „liczb" siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zapisze, że
wszystkich „liczb" siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2$

oraz

wszystkich „liczb" siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ jest $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający poprawnie obliczy liczbę rozważanych liczb: 12960.

Uwagi

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb siedmiocyfrowych bez użycia symbolu Newtona oraz symbolu silni.
2. Jeśli zdający, obliczając liczbę wszystkich szukanych liczb metodą opisaną w II sposobie rozwiązania, poprawnie zapisze jedynie liczbę sposobów rozmieszczenia w całej I części rozwiązania:

- cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry 2

lub

- cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2

lub

- cyfry 2 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2,

to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty.**

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Rozważamy trzy przypadki.

- I. Pierwszą cyfrą rozpatrywanej liczby jest 1. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie dwie cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9}. Takich liczb istnieje
$$\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2 = 15\cdot 6\cdot 64 = 5760\,.$$
- II. Pierwszą cyfrą rozpatrywanej jest 2. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9}. Takich liczb istnieje
$$\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{1}\cdot 8^2 = 20\cdot 3\cdot 64 = 3840\,.$$
- III. Pierwsza cyfra rozpatrywanej liczby jest różna od 1 i od 2. Pierwsza cyfra jest też różna od 0. Zatem na pierwszym miejscu stoi jedna z siedmiu cyfr ze zbioru {3,4,5,6,7,8,9}. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9}. Takich liczb istnieje
$$7\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8 = 7\cdot 20\cdot 3\cdot 8 = 3360\,.$$

Łącznie istnieje zatem $5760+3840+3360=12960$ rozważanych liczb.
Istnieje 12960 siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

<u>II sposób</u>

Zliczamy wszystkie „liczby” siedmiocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9}. Wtedy na siedmiu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9}.
Takich „liczb” jest
$$\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2 = 35\cdot 6\cdot 64 = 13440\,.$$

Następnie zliczamy wszystkie „liczby” siedmiocyfrowe, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9}.
Takich „liczb” jest

$$\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 8 = 20\cdot 3\cdot 8 = 480.$$

Jest zatem $13440-480=12960$ rozważanych liczb.

Zadanie 14. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól po wierzchni i objętości (9.6). 7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu (R9.1).

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania………………………………………………………………… 1p.
Zdający:
- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze $|AB|+|CD|=10+16$

albo
- obliczy wysokość trapezu $ABCD: h=|CE|=8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp……………………………………………….………… 2p.

Zdający:
- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze $|AB|+|CD|=10+16$ i obliczy wysokość trapezu $ABCD: h=|CE|=8$

albo
- obliczy wysokość trapezu $ABCD$: $h=|CE|=8$ i wysokość tego ostrosłupa $H=18$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym dokonano istotnego postępu, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania…...……………………………………………………………….....… 3p.

Zdający:
- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze $|AB|+|CD|=10+16$ oraz obliczy wysokość tego ostrosłupa $H=18$

albo

- obliczy pole podstawy tego ostrosłupa: $P_{ABCD} = 104$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ………………………………………………… 4p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa $H = 18$ i pole jego podstawy: $P_{ABCD} = 104$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie zadania do końca z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozumowania (np. błędy rachunkowe, błędy w przepisaniu, itp.) .... 5p.

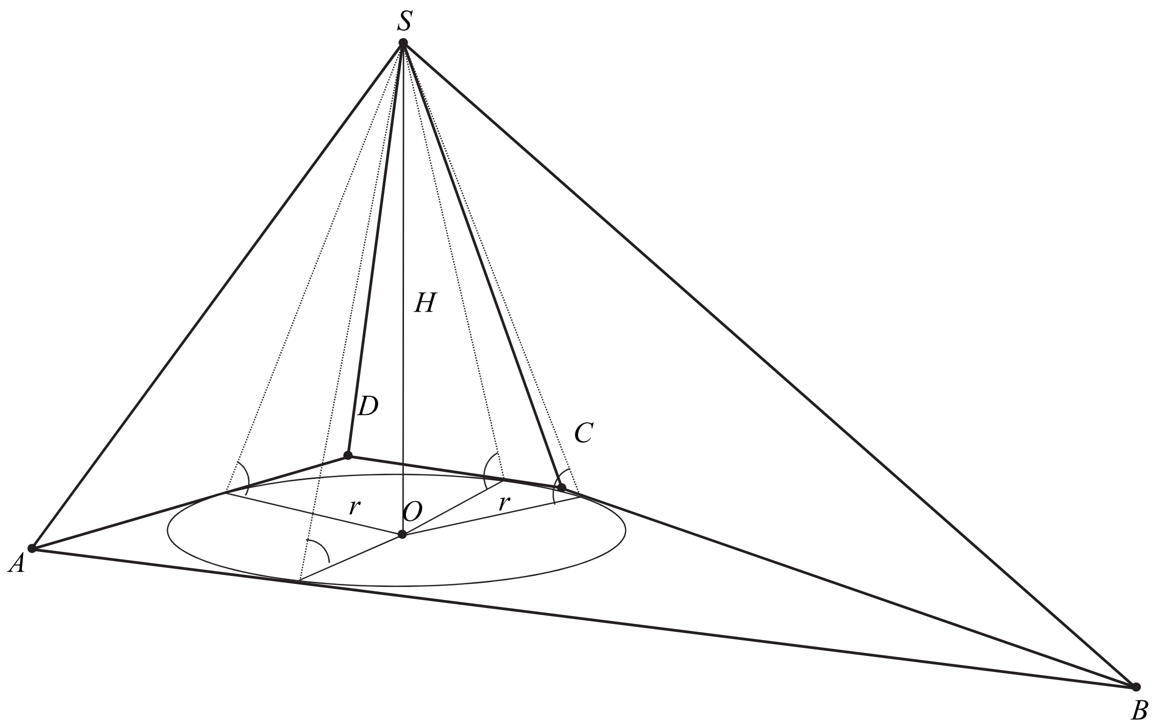
Rozwiązanie pełne……………………………………………………………………………... 6p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = 624$.

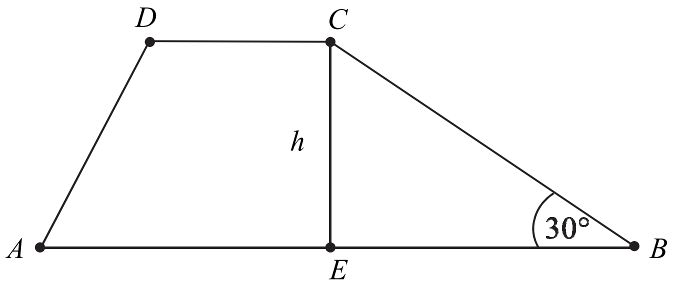
Uwagi

1. Jeżeli zdający we wzorze na objętość ostrosłupa pominie czynnik $\frac{1}{3}$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd polegający na niepoprawnym zastosowaniu definicji funkcji tangens, np.: przyjmie, że jest to stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty.**
3. Jeżeli zdający popełni błąd polegający na tym, że niepoprawnie ustali związki między długościami boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych $30°$ i $60°$, np. przyjmie, że wysokość trapezu to $8\sqrt{3}$, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty.**
4. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że trapez *ABCD* jest równoramienny lub przyjmie, że podstawy tego trapezu mają długości 16 i 10, to za całe rozwiązanie może trzymać co najwyżej **1 punkt.**

Przykładowe rozwiązanie



Ponieważ w tym ostrosłupie wszystkie ściany boczne nachylone są do podstawy pod tym samym kątem, więc spodek *O* wysokości *H* ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w wielokąt będący podstawą ostrosłupa. Niech r oznacza promień okręgu wpisanego w podstawę, h – wysokość trapezu $ABCD$, H natomiast niech oznacza wysokość ostrosłupa.



Ponieważ w trapez można wpisać okrąg, więc spełniony jest warunek: $|AB|+|CD|=26$.
Korzystając z własności trójkąta prostokątnego EBC o kątach $30°$, $60°$, $90°$, otrzymujemy:

$$h=|CE|=8 \text{, a stąd wynika, że } r=4.$$

Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha=\frac{9}{2}$, więc $\frac{9}{2}=\frac{H}{r}$ i stąd obliczamy $H=18$.
Objętość tego ostrosłupa jest zatem równa

$$V=\frac{1}{3}\cdot P_{ABCD}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{|AB|+|CD|}{2}\cdot h\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{26}{2}\cdot 8\cdot 18=624.$$

Zadanie 15. (0–7)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).

Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

- przyjęcia jednego z wymiarów ekranu (długość, szerokość) za zmienną *x* i obliczenie drugiego wymiaru *y*: $y=\frac{6000}{x}$.
- wyrażenia pola powierzchni całego ekranu z obramowaniem jako funkcji jednej zmiennej *x*:

$$P(x)=6x+\frac{60000}{x}+6060$$

- wyznaczenia dziedziny funkcji *P:* $\left(2\sqrt{1501}-2,+\infty\right)$.

Za poprawne wykonanie każdej z tych części zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednie kroki też były wykonane poprawnie.

Drugi etap składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji *P* lub funkcji $f\left(x\right)=6x+\frac{60000}{x}$ określonej np. dla $x>0$: $f'\left(x\right)=6-\frac{60000}{x^2}=\frac{6x^2-60000}{x^2}=\frac{6\left(x^2-10000\right)}{x^2}$.
- obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji *f* : $x=100$
- zbadanie znaku pochodnej funkcji *f* : jeśli $0<x<100$, to $f'\left(x\right)<0$ oraz jeśli $x>100$, to $f'\left(x\right)>0$ i uzasadnienie, że dla $x=100$ funkcja *P* przyjmuje wartość najmniejszą, na przykład: w przedziale $\left(2\sqrt{1501}-2,100\right\rangle$ funkcja *P* jest malejąca, w przedziale $\left\langle 100,+\infty\right)$ funkcja *P* jest rosnąca, więc najmniejszą wartość funkcja *P* przyjmuje dla $x=100$.

Za poprawne wykonanie każdego z tych kroków zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednie kroki też były wykonane poprawnie.

Trzeci etap polega na obliczeniu obu wymiarów ekranu: $x=100$ oraz $y=60$.
Za poprawne wykonanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Ten sposób rozwiązania składa się z następujących czterech kroków:
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1p.

Jeżeli zdający przyjmie oznaczenia (na przykład *x* i *y*) na długość i szerokość ekranu, zapisze pole powierzchni całego ekranu z obramowaniem

$$P=\left(x+10\right)\left(y+6\right)$$

Uwaga
Zdający, gdy przyjmie oznaczenia (na przykład *x* i *y*) na długość i szerokość ekranu, zapisze równość

$$P=6060+6x+10y$$

to otrzymuje **2 punkty.**

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 3 p.

Zdający zapisze nierówność między średnimi:

$$\frac{6x+10y}{2}\geq\sqrt{6x\cdot 10y}.$$

Uwaga
Jeżeli zdający zapisze, że *x* i *y* są liczbami dodatnimi, a więc wolno skorzystać z nierówności między średnimi i zapisze nierówność między średnimi:
$\frac{6x+10y}{2}\geq\sqrt{6x\cdot 10y}$, to otrzymuje **4 punkty.**

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 5 p.

Zdający wykaże nierówność $P\geq 7260$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 6 p.

Zdający znajdzie wartości $x=100$ mm, $y=60$ mm.

Rozwiązanie pełne .... 7 p.

Zdający wyciągnie wniosek, że dla x= 100 i y=60 smartfon ma najmniejszą powierzchnię.

Zasady oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

- przyjęcia jednego z wymiarów całego smartfona (długość, szerokość) za zmienną *x* i obliczenie drugiego wymiaru całego smarfona *y*: $y=\frac{6000}{x-10}+6$.
- wyrażenia pola powierzchni całego ekranu z obramowaniem jako funkcji jednej zmiennej *x*:
$$P(x)=x\left(\frac{6000}{x-10}+6\right)=\frac{6000x}{x-10}+6x.$$
- wyznaczenia dziedziny funkcji *P:* $\left(2\sqrt{1501}+8,+\infty\right)$.

Za poprawne wykonanie każdego z tych etapów zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednie kroki też były wykonane poprawnie.

Drugi etap składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji *P* lub funkcji $f(x)=\frac{6000x}{x-10}+6x$ określonej np. dla $x>0$:
$$f'(x)=\frac{6000(x-10)-6000x}{(x-10)^2}+6=\frac{6\left((x-10)^2-10000\right)}{(x-10)^2}=\frac{6(x-110)(x+90)}{(x-10)^2}.$$
- obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji *f*: $x=110$
- zbadanie znaku pochodnej funkcji *f*: jeśli $0<x<110$, to $f'(x)<0$ oraz jeśli $x>110$, to $f'(x)>0$ i uzasadnienie, że dla $x=110$ funkcja *P* przyjmuje wartość najmniejszą, na przykład: w przedziale $\left(2\sqrt{1501}+8,\ 110\right\rangle$ funkcja *P* jest malejąca, w przedziale $\left\langle 110,+\infty\right)$ funkcja *P* jest rosnąca, więc najmniejszą wartość funkcja *P* przyjmuje dla $x=110$.

Za poprawne wykonanie każdego z tych etapów zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednie kroki też były wykonane poprawnie.

Trzeci etap polega na obliczeniu obu wymiarów ekranu: $x=100$ oraz $y=60$.
Za poprawne wykonanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwagi

1. Jeżeli zdający rozpatruje funkcję *P* przy założeniu, że $x+10>y+6>0$, obliczy wymiary ekranu 100 mm i 60 mm oraz obliczy wymiary smartfona 110 mm i 66 mm, i sprawdzi, że wymiary ekranu spełniają założenie $x+10>y+6$, to może otrzymać **7 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji *P*, ale z rozwiązania wynika, że rozważa funkcję *P* na zbiorze, w którym co najmniej jeden z wymiarów ekranu przyjmuje wartości ujemne, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
3. Jeżeli zdający przyjmuje błędnie, że powierzchnia smartfona jest równa $60\,cm^2$ i bada powierzchnię ekranu smartfona jako funkcję jednej zmiennej, to **nie otrzymuje 1 punktu za 1. część I etapu** rozwiązania, a w konsekwencji może otrzymać co najwyżej **6 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający nie ujednolici jednostek, ale przeprowadzi pełne rozumowanie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (3 punkty wyłącznie za II etap rozwiązania).
5. Jeżeli zdający popełni błąd w zamianie $60\ \mathrm{cm}^2$ zapisując $600\ \mathrm{mm}^2$ i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
6. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak.
7. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości *x*, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuacje, gdy zdający:

   a) opisuje słownie lub graficznie (np. przy użyciu strzałek), monotoniczność funkcji *P*;

   lub

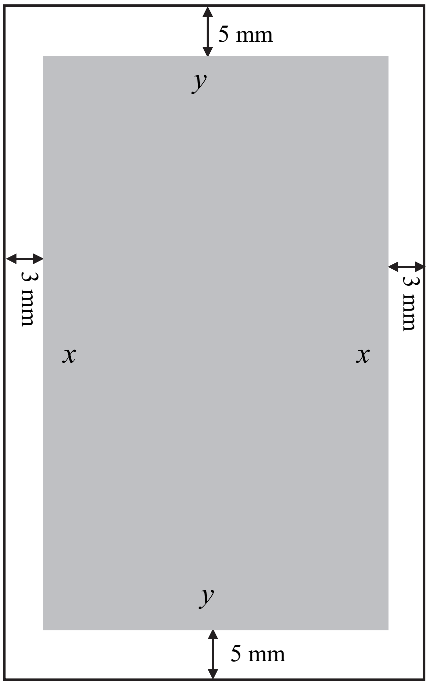
   b) zapisuje, że dla wyznaczonej wartości *x* funkcja *P* ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość.

   Jeżeli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
8. Jeżeli zdający przyjmie, że dziedziną funkcji *P* jest przedział $(0,+\infty)$, to może otrzymać **1 punkt za 3. część II etapu**, o ile otrzymane miejsce zerowe pochodnej należy do właściwej dziedziny funkcji *P*.
9. Jeżeli zdający rozpatruje inną wielkość niż pole, np. bada obwód, to za całe rozwiązanie zadania może otrzymać co najwyżej **1 punkt za 1. część I etapu.**

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Oznaczmy długości boków ekranu smartfona literami *x* i *y* (x>y) tak jak na rysunku:



Wtedy powierzchnia ekranu jest równa (w mm^2):

$$xy = 6000,$$

skąd wynika, że

$$y = \frac{6000}{x}.$$

Powierzchnia całego smartfona (tj. ekranu z obramowaniem) jest równa

$$P = (x+10)(y+6) = xy + 6x + 10y + 60 = 6000 + 6x + 10y + 60 = 6x + \frac{60000}{x} + 6060.$$

Ponieważ $x+10 > y+6 > 0$, to $x+4 > \frac{6000}{x}$. Stąd otrzymujemy kolejno:

$$x^2 + 4x > 6000,$$
$$x^2 + 4x + 4 > 6004,$$
$$(x+2)^2 > 6004,$$
$$|x+2| > 2\sqrt{1501},$$
$$x > 2\sqrt{1501} - 2.$$

Otrzymaliśmy funkcję *P* zmiennej *x* określoną wzorem

$$P(x) = 6x + \frac{60000}{x} + 6060 \text{ dla } x \in \left(2\sqrt{1501} - 2, +\infty\right).$$

Obliczamy pochodną funkcji *P*:

$$P'(x) = 6 - \frac{60000}{x^2} = \frac{6\left(x^2 - 10000\right)}{x^2} \text{ dla } x \in \left(2\sqrt{1501} - 2, +\infty\right).$$

Miejscem zerowym pochodnej funkcji *P* jest $x=100$, gdyż
$2\sqrt{1501}-2<2\sqrt{1521}-2=2\cdot 39-2=76<100$.

Ponadto $P'(x)<0$ dla $x\in\left(2\sqrt{1501}-2,100\right)$ oraz $P'(x)>0$ dla $x\in(100,+\infty)$.

Zatem w przedziale $\left(2\sqrt{1501}-2,100\right\rangle$ funkcja *P* jest malejąca, a w przedziale $\left\langle 100,+\infty\right)$ funkcja *P* jest rosnąca.
Stąd wynika, że funkcja *P* dla $x=100$ przyjmuje najmniejszą wartość. Wtedy $y=60$.

Poszukiwanymi wymiarami ekranu smartfona są: $x=100$ mm, $y=60$ mm.

<u>II sposób</u>
Tak jak w sposobie pierwszym obliczamy w milimetrach kwadratowych powierzchnię ekranu:
$$P=6060+6x+10y.$$
Korzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną:
$$\frac{6x+10y}{2}\geq\sqrt{6x\cdot 10y}=\sqrt{60xy}=\sqrt{60\cdot 6000}=\sqrt{6^2\cdot 10000}=6\cdot 100=600.$$
Stąd wynika, że
$$P=6060+6x+10y\geq 6060+1200=7260.$$

W nierówności między średnimi równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby występujące w tych średnich są równe.

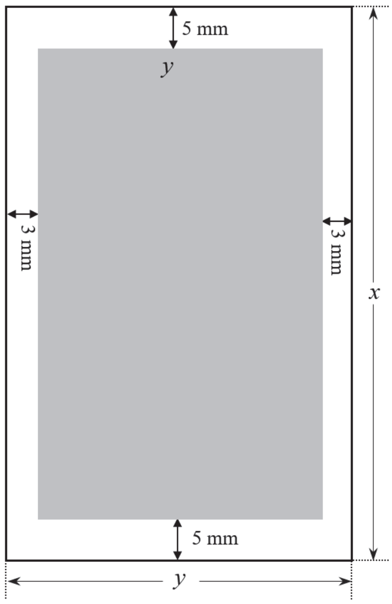
Niech $6x=10y$, czyli $6x=10\cdot\dfrac{6000}{x}$.
Stąd otrzymujemy równanie: $x^2=10000$.

Jedynym dodatnim rozwiązaniem tego równania jest $x=100$.
Wtedy $y=60$. Ponieważ $P\geq 7260$ oraz dla $x=100$ i $y=60$ mamy
$$P=110\cdot 66=7260,$$
więc ekran z obramowaniem ma najmniejszą powierzchnię dla $x=100$ i $y=60$.

Poszukiwanymi wymiarami ekranu są: $x=100$ mm, $y=60$ mm.

III sposób

Oznaczmy długości boków całego smartfona przez *x* i *y* (x>y) tak jak na rysunku:



Wtedy powierzchnia ekranu jest równa (w mm^2):

$$(x-10)(y-6)=6000$$

skąd wynika, że

$$y=\frac{6000}{x-10}+6.$$

Powierzchnia całego smartfona (tj. ekranu z obramowaniem) jest równa

$$P=x\left(\frac{6000}{x-10}+6\right)=\frac{6000x}{x-10}+6x.$$

Ponieważ $x>y>6$ i $x>10$, to $x>\dfrac{6000}{x-10}+6$. Stąd otrzymujemy kolejno:

$$x^2-10x>6000+6x-60,$$
$$x^2-16x+64>6004,$$
$$(x-8)^2>6004,$$
$$|x-8|>2\sqrt{1501},$$
$$x>2\sqrt{1501}+8.$$

Otrzymaliśmy funkcję *P* zmiennej *x* określoną wzorem

$$P(x)=\frac{6000x}{x-10}+6x \text{ dla } x\in\left(2\sqrt{1501}+8,+\infty\right).$$

Obliczamy pochodną funkcji *P*:

$$P'(x)=\frac{6000(x-10)-6000x}{(x-10)^2}+6=\frac{6\left((x-10)^2-10000\right)}{(x-10)^2}=\frac{6(x-110)(x+90)}{(x-10)^2}$$

dla $x\in\left(2\sqrt{1501}+8,+\infty\right)$.

Miejscem zerowym pochodnej funkcji *P* jest $x = 110$, bo
$2\sqrt{1501}+8 < 2\sqrt{1521}+8 = 2\cdot 39+8 = 86 < 110$.

Ponadto $P'(x) < 0$ dla $x \in \left(2\sqrt{1501}+8, 110\right)$ oraz $P'(x) > 0$ dla $x \in \left(110, +\infty\right)$.

Zatem w przedziale $\left(2\sqrt{1501}+8, 110\right\rangle$ funkcja *P* jest malejąca, a w przedziale $\left\langle 110, +\infty\right)$ funkcja *P* jest rosnąca.
Stąd wynika, że funkcja *P* dla $x = 110$ przyjmuje najmniejszą wartość.
Wtedy $y = \frac{6000}{110-10} + 6 = 66$.
Poszukiwanymi wymiarami ekranu smartfona są: $x = 100$ mm, $y = 60$ mm.